Apellido paterno:	Apellido materno:	Nombre:

Pregunta 1	Pregunta 2	Pregunta 3	Total	Nota

<u>**Instrucciones**</u>:
- **NO HAY CONSULTAS**. Las respuestas sin desarrollo o sin justificación, no dan puntaje.
- Conteste en forma ordenada y justifique adecuadamente cada respuesta.
- Queda prohibido el uso de calculadoras programables, formulario y **celulares**.

Nota $= 1+\dfrac{Puntos}{10}$. **Duración** = 60 minutos

---

1) **[20 ptos.]** Teorema del binomio:

   a) **[5 ptos.]** Demuestre que $\displaystyle\sum_{k=0}^{12}\binom{12}{k}(-1)^{-k}2^k = 1$.

   b) **[15 ptos.]** Determinar el coeficiente de x^{-2} en el desarrollo de

$$\left(x+\frac{2}{x}\right)^7\left(x-\frac{2}{x}\right)$$

2) **[20 ptos.]** Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la progresión geométrica de <u>**razón positiva**</u> cuyo tercer y quinto término son 18 y 162, respectivamente. Sea S_n la suma de los primeros n términos de la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

   a) **[5 ptos.]** Determinar una fórmula explícita para el término a_n.

   b) **[10 ptos.]** Use el principio de inducción para demostrar que

$$(\forall\, n\in\mathbb{N}, n\geq 1)(3^n \geq 2n+1)$$

   c) **[5 ptos.]** Use lo anterior para concluir que $S_n \geq 2n$ para todo $n\geq 1$.

3) **[20 ptos.]** Considere los números complejos $u = 1-i\sqrt{3}$ y $v = \dfrac{\sqrt{3}+i}{4}$.

   a) **[10 ptos.]** Escribir $z_1 = \dfrac{u}{\overline{v}}$ en la forma binomial $a+bi$.

   b) **[10 ptos.]** Simplificar u^5v^{10}.

Pauta

1) Tenemos:

a) Reescribiendo y usando el teorema del binomio, se tiene que

$$\sum_{k=0}^{12}\binom{12}{k}(-1)^{-k}2^k=\sum_{k=0}^{12}\binom{12}{k}(-1)^{12-k}2^k=(-1+2)^{12}=1^{12}=1$$

Desarrollo alternativo:

$$\sum_{k=0}^{12}\binom{12}{k}(-1)^{-k}2^k=\sum_{k=0}^{12}\binom{12}{k}(-1)^{k}2^k=\sum_{k=0}^{12}\binom{12}{k}(-2)^k=(1-2)^{12}=(-1)^{12}=1$$

b) Desarrollando el binomio, se tiene que

$$\begin{aligned}\left(x+\frac{2}{x}\right)^7\left(x-\frac{2}{x}\right) &= \left(\sum_{k=0}^{7}\binom{7}{k}x^{7-k}(2x^{-1})^k\right)\left(x-\frac{2}{x}\right)\\ &= \sum_{k=0}^{7}\binom{7}{k}2^k\cdot x^{7-2k}x-\sum_{k=0}^{7}\binom{7}{k}2^{k+1}\cdot x^{7-2k}x^{-1}\\ &= \sum_{k=0}^{7}\binom{7}{k}2^k\cdot x^{8-2k}-\sum_{k=0}^{7}\binom{7}{k}2^{k+1}\cdot x^{6-2k}\end{aligned}$$

Note entonces que el término x^{-2} aparece en la primera suma para $k\in[0,7]\subset\mathbb{N}$ tal que $8-2k=-2$, es decir, para $k=5$. De modo similar, x^{-2} aparece en la segunda suma para $k\in[0,7]\subset\mathbb{N}$ tal que $6-2k=-2$, es decir, para $k=4$. Por lo tanto, el coeficiente de x^{-2} en el desarrollo es

$$\binom{7}{5}2^5-\binom{7}{4}2^5=2^5(21-35)=32(-14)=-448$$

2) Tenemos:

a) Sea a el primer elemento de la sucesión y r la razón, luego tenemos que

$$a_2 = ar^2 = 18 \quad \text{y} \quad a_4 = ar^4 = 162$$

Esto implica que $r^2 = 9$. Como $\{a_n\}$ tiene razón positiva, escogemos $r = 3$. Reemplazando este valor en alguna de las dos igualdades anteriores, se tiene que $a = 2$. Así concluimos que $a_n = 2 \cdot 3^n$, para $n \geq 0$.

b) El primer paso de inducción se satisface claramente, pues $3 = 3^1 \geq 2(1) + 1 = 3$. Ahora, supongamos que la proposición $p(n) :\ 3^n \geq 2n + 1$ es verdadera. Luego

$$3^{n+1} = 3 \cdot 3^n = 3^n + 2 \cdot 3^n \underset{\text{Hip. ind.}}{\geq} 2n + 1 + 2 \cdot 3^n \underset{\text{pues } 3^n \geq 1}{\geq} 2n + 1 + 2 = 2n + 3$$

es decir, la proposición $p(n+1) :\ 3^{n+1} \geq 2(n+1) + 1$ es verdadera, concluyendo así la demostración.

c) Usando directamente la suma de los primeros n términos para una P.G. tenemos que

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k = \sum_{k=0}^{n-1} 2 \cdot 3^k = 2\left(\frac{3^n - 1}{3 - 1}\right) = 3^n - 1$$

Luego, usando el item anterior, se tiene que $S_n = 3^n - 1 \geq 2n + 1 - 1 = 2n$.

3) Números complejos:

a) Tenemos

$$z_1 = 4 \cdot \frac{1 - i\sqrt{3}}{\sqrt{3} - i} \cdot \frac{\sqrt{3} + i}{\sqrt{3} + i} = 4 \cdot \frac{2\sqrt{3} - 2i}{4} = 2\sqrt{3} - 2i$$

b) Para escribir la forma polar de u debemos determinar un ángulo θ tal que $\tan(\theta) = -\sqrt{3}$ y además tener en cuenta que u está en el cuarto cuadrante. Luego $\theta = -\pi/3$. Así, la forma polar de u es $2 \cdot \text{cis}(-\pi/3)$. Del mismo modo, para v buscamos un ángulo α tal que $\tan(\alpha) = 1/\sqrt{3}$, y además, tener en cuenta que v está en el primer cuadrante. Luego $\alpha = \pi/6$. Por lo tanto, la forma polar de v es $(1/2)\text{cis}(\pi/6)$.

Usando el teorema de Moivre, tenemos que

$$\begin{aligned} u^5 v^{10} &= 2^5 \cdot \text{cis}(-\frac{5\pi}{3}) \cdot \frac{1}{2^{10}} \cdot \text{cis}(\frac{5\pi}{3}) \\ &= \frac{2^5}{2^{10}} \cdot \text{cis}(-\frac{5\pi}{3} + \frac{5\pi}{3}) \\ &= \frac{1}{2^5} \cdot \text{cis}(0) \\ &= \frac{1}{2^5} \cdot 1 \\ &= \frac{1}{32} \end{aligned}$$